

Soluțiile problemelor propuse la REUM II

Centrul Olimpicilor

Mai 2025

1 Categorie JUNIORI (Clasele 7-8)

1.1 Problema 1

Aflați toate numerele $\overline{abcdef}$ care satisfac

$$\overline{abcdef} + \overline{af} + \overline{be} + \overline{cd} = 314254$$

* $\overline{xyz}$ reprezintă scrierea în baza 10. De exemplu, $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$.

Stoicescu Alex

Soluție

$$3 \leq \overline{af} + \overline{be} + \overline{cd} \leq 297 \Rightarrow \overline{ab} = 31.$$

$$\Rightarrow 0 < \overline{af} + \overline{be} + \overline{cd} = \overline{3f} + \overline{1e} + \overline{cd} \leq 157 \Rightarrow \overline{abc} = 314$$

$$\Rightarrow 80 \leq \overline{af} + \overline{be} + \overline{cd} = \overline{3f} + \overline{1e} + \overline{4d} \leq 107 \Rightarrow 314147 \leq \overline{abcdef} \leq 314174 \Rightarrow \overline{abcd} = 3141$$

$$\Rightarrow 81 \leq \overline{af} + \overline{be} + \overline{cd} = \overline{3f} + \overline{1e} + 41 \leq 99 \Rightarrow 314155 \leq \overline{abcdef} \leq 314173 \Rightarrow e = 5 \text{ sau } e = 6 \text{ sau } e = 7.$$

Se verifică $e = 6$ și $e = 7$, de unde obținem $f \notin \mathbb{N}$.

$e = 5$ implică $f = 9$, deci $\overline{abcdef} = 314159$.

Barem de notare:

$$\overline{ab} = 31 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

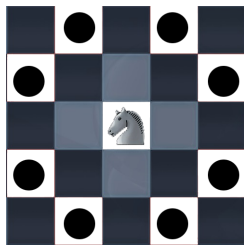
$$\overline{abc} = 314 \dots\dots\dots 2\text{p}$$

$$\overline{abcd} = 3141 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\overline{abcdef} = 314159 \dots\dots\dots 3\text{p}$$

1.2 Problema 2

Fie o tablă de șah $n \times n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pe tablă se scriu numerele de la 1 la n^2 în ordine crescătoare, de sus în jos, începând cu liniile, de la stânga la dreapta. Vom spune că un cal este caracatiță dacă toate cele 8 câmpuri pe care le atacă sunt pe tablă. Mai mult, o caracatiță este interesantă dacă cel mai mare divizor comun al celor 8 câmpuri pe care le atacă este diferit de 1. Determinați numerele n pentru care există o caracatiță interesantă.



Dragomir Eduard

Soluție

Fie n un număr cu proprietatea din enunț. Pentru început, vom demonstra că n este impar. Fie k numărul scris pe cel mai de sus câmp atacat de cal, dar și cel mai din stânga de pe acea linie. Atunci, celelalte câmpuri vor avea următoarele numere : $k+2, n+k-1, n+k+3, 3n+k-1, 3n+k+3, 4n+k, 4n+k+2$. Cel mai mare divizor comun al acestor numere trebuie să fie diferit de 1, dar $(k, k+2) \leq 2$, deci : $(k, k+2, n+k-1, n+k+3, 3n+k-1, 3n+k+3, 4n+k, 4n+k+2) = 2$. De aici, obținem că n este impar. Pentru existența unei caracatițe, este necesar ca tabla să aibă minim 5 coloane, deci $n \geq 5$. Pentru $n \geq 5$, n impar, putem alege să poziționăm calul în centrul tablei. În concluzie, $n \geq 5, n \equiv 1 \pmod{2}$.

Barem de notare:

Determinarea coordonatelor câmpurilor atacate 2p

Demonstrare n -impar 2p

Justificare $n \geq 5$ 1p

Exemplu 2p

1.3 Problema 3

Fie $n \geq 2$ un număr natural. Considerăm M mulțimea punctelor de coordonate întregi (x, y) cu $0 < x, y \leq n$.

Pentru un număr natural k fixat, $2 \leq k \leq n^2$, considerăm k puncte distincte din M , notate $A_1, A_2, \dots, A_k$.

Determinați cea mai mică valoare pe care o poate lua suma $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{k-1}A_k + A_kA_1$.

*Am notat cu A_iA_j lungimea segmentului determinat de punctele A_i și A_j .

Toader David Ștefan

Soluție

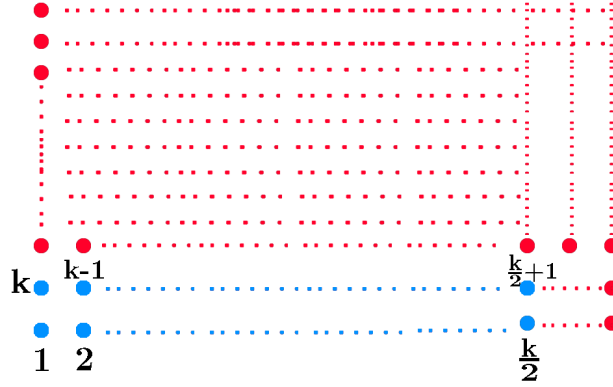
Spunem că minimul sumei $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{k-1}A_k + A_kA_1$ este scorul lui k .

Vom demonstra că scorul lui k este k , pentru k par, și $k - 1 + \sqrt{2}$, pentru k impar.

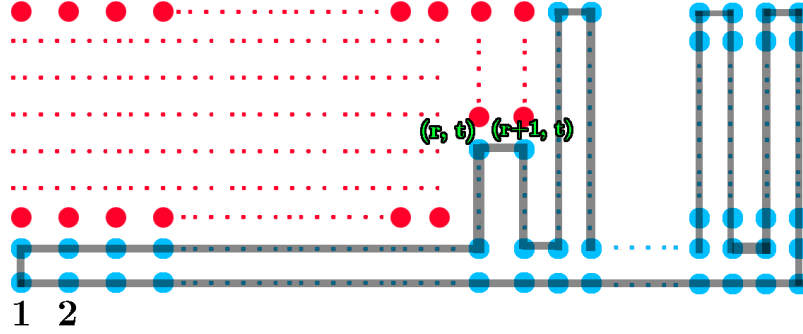
Pentru k par, demonstrăm că scorul lui k pentru jocul n^2 este cel puțin k . Acest lucru se întâmplă deoarece A_iA_{i+1} (indici modulo n) este cel puțin 1.

Pentru k impar, este suficient să demonstrăm că scorul lui k pentru jocul n^2 nu poate fi k , deoarece $k - 1 + \sqrt{2}$ este al doilea cel mai mic scor posibil. Presupunem că există un k impar, astfel încât scorul lui k în jocul n^2 este k . Asta înseamnă că $A_iA_{i+1} = 1$, oricare ar fi $i = \overline{1, n}$. Dacă 2 puncte din M , A și B sunt la distanța 1, atunci, pentru a parcurge $[AB]$, trebuie să efectuez o singură mutare (de o pătrățică), fie la dreapta, stânga, sus sau jos. Fie x numărul mutărilor la dreapta din desen. Atunci, pentru ca la finalul tuturor parcurgerilor să ajungem din nou în A_1 , numărul mutărilor la stânga este tot x . Analog, dacă numărul mutărilor în sus este y , numărul mutărilor în jos este tot y . Numărul total al mutărilor este $2x + 2y$ (par), care este totodată și k (impar), contradicție, deci presupunerea a fost falsă, așadar scorul lui k (impar) pentru jocul n^2 este cel puțin $k - 1 + \sqrt{2}$.

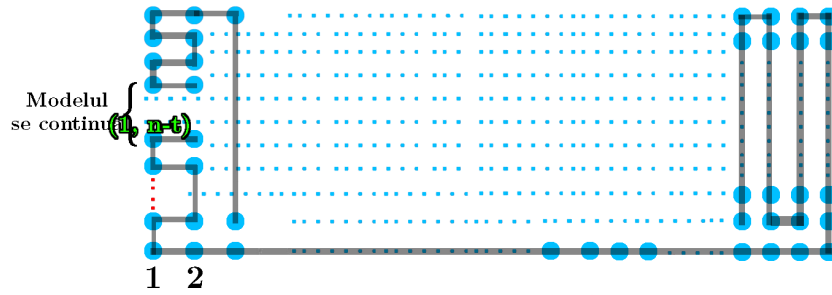
Urmează să arătăm că în ambele cazuri, minimul precizat se poate atinge. Pentru fiecare dintre cazuri, este atașată câte o poza pentru modul de construcție al exemplelor. Exemplele date sunt doar pentru k (par), deoarece pentru exemplele cu k (impar), $k \neq n^2$, putem considera cazul $k + 1$ și configurațiile aferente, care vor avea A_{k-1} la distanță $\sqrt{2}$ de A_1 , deci putem considera în acest caz, configurația pentru k formată din toate aceste puncte, fără A_k . Cazul k (impar) $= n^2$ va fi tratat separat. (Punctele albastre sunt cele alese în configurație, și traseul este cel negru.)



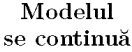
Caz 1, Subcaz 1: n impar, k par, $2 \leq k \leq 2n$



Caz 1, Subcaz 2: n impar, k par, $2n + 2 \leq k \leq n^2 - n + 2$. Va exista $2 \leq r \leq n - 1$, r par și $2 \leq t \leq n$, $r, t \in \mathbb{N}$, astfel încât $k = 2n + (n - 2) \cdot (n - r - 1) + 2t - 4$.



Caz 1, Subcaz 3: n impar, k par, $n^2 - 1 \leq k \leq n^2 - n + 3$. Va exista $t \leq n - 3$, t par, astfel încât $k = n^2 - n + 2 + t$, $t \in \mathbb{N}$.



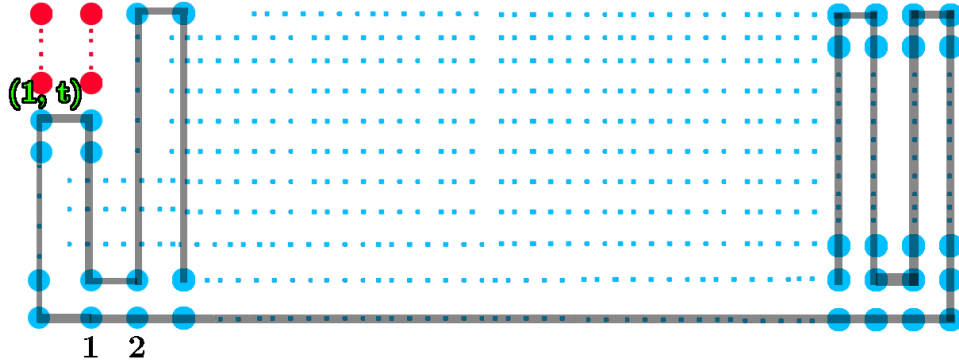
Caz 1, Subcaz 4: n impar, $k = n^2$



Caz 2, Subcaz 1: n par, k par, $2 \leq k \leq 2n - 2$



Caz 2, Subcaz 2: n par, k par, $2n \leq k \leq n^2 - 2n + 2$. Va exista $4 \leq r \leq n$, r par și $2 \leq t \leq n$, $r, t \in \mathbb{N}$ astfel încât $k = 2(n-1) + (n-r)(n-2) + 2(t-2)$.



Caz 2, Subcaz 3: n par, k par, $n^2 - 2n + 4 \leq k \leq n^2$. Va exista $t \geq 2$ astfel încât $k = n^2 - 2(n - t)$, $t \in \mathbb{N}$.

Barem de notare:

Precizarea minimului pentru fiecare dintre cazurile de paritate ale lui k 1p

Demonstrarea faptului că minimul scorului pentru k (par) este $\geq$ cu k 1p

Demonstrarea faptului că minimul scorului pentru k (impar) este $\geq$ cu $k - 1 + \sqrt{2}$ 2p

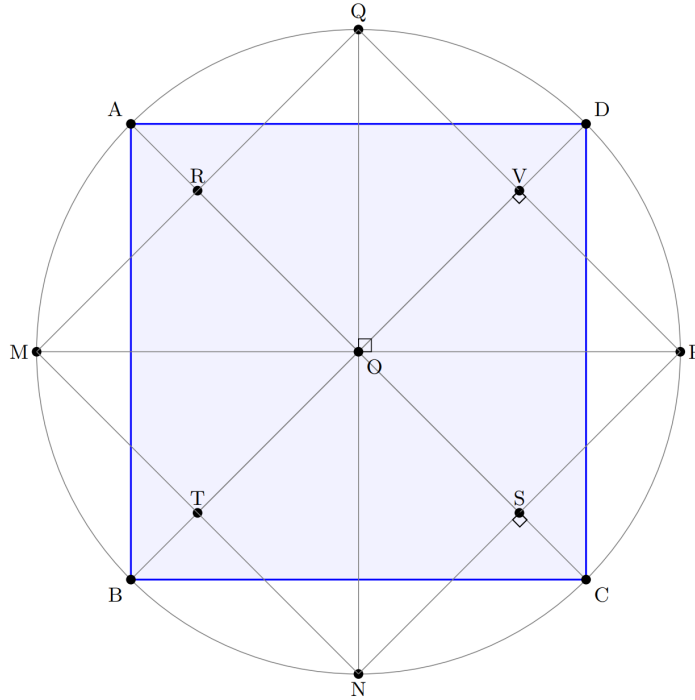
Exemple 3p

1.4 Problema 4

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, iar I_1 , respectiv I_2 , centrele cercurilor înscrise triunghiurilor ADB , respectiv BCD . DI_1 , DI_2 , BI_2 , respectiv BI_1 intersectează cercul circumscris patrulaterului $ABCD$ în punctele M , N , P , respectiv Q . Dacă diagonalele patrulaterelor $ABCD$ și $MNPQ$ se intersectează în același punct, iar AC , respectiv BD intersectează (MQ) , respectiv (MN) în mijloacele acestora, demonstrați că $ABCD$ este pătrat.

Stoicescu Alex

Soluție



Fie intersecția diagonalelor celor două patrulatere în O . Considerăm $AC \cap MQ = \{R\}$, $AC \cap NP = \{S\}$, $BD \cap MN = \{T\}$, $BD \cap PQ = \{V\}$.

$$\text{Avem } \angle PON = \frac{\widehat{PC} + \widehat{CN} + \widehat{AQ} + \widehat{AM}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA}}{4} = 90^\circ.$$

Deci, $MNPQ$ este ortodiagonal.

Cum punctul R este mijlocul segmentului (MQ) , din Teorema Mediane rezultă $OR = QR = RM$, deci $\angle OQR = \angle QOR$.

$MNPQ$ este inscriptibil, deci $\angle MQN = \angle MPN$.

Cum R, O, S sunt coliniare, iar $\angle POQ = 90^\circ$, avem $\angle POS = 90^\circ - \angle QOA$. Din $\angle OPS = \angle AQO = \angle QOA$, rezultă $\angle PSO = 90^\circ$, adică $AC \perp NP$.

În mod analog, obținem $BD \perp PQ$.

$$90^\circ = \angle DVP = \frac{\widehat{DP} + \widehat{AQ} + \widehat{AM} + \widehat{MB}}{2}$$

$$90^\circ = \angle ASN = \frac{\widehat{AM} + \widehat{MB} + \widehat{BN} + \widehat{PC}}{2} = \frac{\widehat{AM} + \widehat{MB} + \widehat{BN} + \widehat{DP}}{2}$$

Scăzând cele două relații, avem $\widehat{AQ} = \widehat{BN} \Leftrightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$.

$$90^\circ = \angle CSN = \frac{\widehat{CN} + \widehat{AQ} + \widehat{QD} + \widehat{DP}}{2}$$

$$90^\circ = \angle PON = \frac{\widehat{PC} + \widehat{CN} + \widehat{AQ} + \widehat{AM}}{2} = \frac{\widehat{DP} + \widehat{CN} + \widehat{AQ} + \widehat{MB}}{2}$$

Scăzând cele două relații, avem $\widehat{QD} = \widehat{MB} \Leftrightarrow \widehat{AD} = \widehat{AB}$

$\Rightarrow \widehat{AQ} = \widehat{AM} \Rightarrow AQ = AM$, deci triunghiul AQM este isoscel cu baza (QM) . Cum R este mijlocul segmentului (QM) , avem $AR \perp MQ$, deci $\angle ARM = 90^\circ$.

$$90^\circ = \angle ARM = \frac{\widehat{AM} + \widehat{DQ} + \widehat{DP} + \widehat{PC}}{2}$$

$$90^\circ = \angle MOQ = \frac{\widehat{AM} + \widehat{AQ} + \widehat{CN} + \widehat{CP}}{2} = \frac{\widehat{AM} + \widehat{DQ} + \widehat{BN} + \widehat{DP}}{2}$$

Scăzând cele două relații, avem $\widehat{PC} = \widehat{BN} \Leftrightarrow \widehat{CD} = \widehat{BC}$.

Deci, $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DA} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$, așadar $ABCD$ este pătrat. $\square$

Barem de notare:

Demonstrarea faptului că $MNPQ$ este ortodiagonal 1p

Demonstrare $AC \perp PN$ și $BD \perp PQ$ 2p

Demonstrare $\widehat{AD} = \widehat{AB} = \widehat{BC}$ 2p

Demonstrare $\widehat{CD} = \widehat{BC}$ și concluzionarea 2p

2 Categoria SENIORI (Clasele 9-12)

2.1 Problema 1

Fie triunghiul ABC . Fie D pe latura AB și E pe latura AC astfel încât $\frac{AD}{DB} = x$ și $\frac{AE}{EC} = y$. Considerăm P intersecția dreptelor CD și BE . Arătați că :

$$\frac{BP}{PE} = \frac{y+1}{x}$$

Toader David Ștefan

Soluție

Fie F intersecția dreptelor AP și BC

Din teorema lui Ceva în triunghiul ABC :

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Deci :

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{1}{y} \cdot x = 1$$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{y}{x}$$

Totodată , din teorema lui Van Aubel :

$$\frac{BP}{PE} = \frac{BF}{FC} + \frac{BD}{DA}$$

$$\frac{BP}{PE} = \frac{y}{x} + \frac{1}{x} = \frac{y+1}{x}$$

O finalizare alternativă constă în demonstrația efectivă a teoremei lui Van Aubel.

Aplicăm teorema lui Menelaos în triunghiul BAE pentru transversala $D - P - C$:

$$\frac{BD}{DA} \cdot \frac{AC}{EC} \cdot \frac{EP}{PB} = 1$$

Deci :

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BP}{PE} \cdot \frac{CE}{AC} \quad (1)$$

Analog , din teorema lui Menelaos în triunghiul BEC cu transversala $A - P - F$:

$$\frac{BP}{PE} \cdot \frac{EA}{CA} \cdot \frac{CF}{FB} = 1$$

Deci :

$$\frac{BF}{FC} = \frac{BP}{PE} \cdot \frac{AE}{AC} \quad (2)$$

Insumând (1) și (2) obținem teorema lui Van Aubel, și efectuând calculele din finalizarea anterioară obținem rezultatul cerut.

Barem de notare:

Considerarea intersecției dintre AP și BC 3p

Aflarea raportului $\frac{BF}{FC}$ 2p

Concluzionarea prin Teorema lui Van Aubel 2p

2.2 Problema 2

Fie p un număr prim. Demonstrați că ecuația :

$$y^{p^2} = p + x^p$$

Nu are soluții în $\mathbb{Z}^2$.

Dragomir Eduard

Soluție

Folosind mica teoremă a lui Fermat, obținem :

$$y^p \equiv y \pmod{p} \implies (y^p)^p \equiv y^p \pmod{p} \implies y^{p^2} \equiv y^p \pmod{p}$$

În același timp, avem :

$$x^p \equiv x \pmod{p}$$

Considerând ecuația mod p , avem :

$$y^{p^2} \equiv x^p \pmod{p} \implies y^p \equiv x \pmod{p} \implies p \mid (y^p - x)$$

Rescriind, obținem :

$$y^{p^2} - x^p = p \iff (y^p)^p - x^p = p \iff (y^p - x) \left(\sum_{l=0}^{p-1} (y^p)^{p-1-l} x^l \right) = p$$

De aici, avem că : $y^p - x = \pm p$, deci : $y^p = x \pm p$. Ecuația se rescrie :

$$(x \pm p)^p = p + x^p \iff \sum_{l=0}^p x^{p-l} \binom{p}{l} (\pm p)^l = p + x^p \iff S = \sum_{l=1}^p \binom{p}{l} x^{p-l} (\pm p)^l = p$$

Pentru $l \geq 2$, avem că : $p^2 \mid (p^l x^{p-l} \binom{p}{l})$. Când $l = 1$, demonstrăm că : $p^2 \mid \binom{p}{1} p x^{p-1} \iff p^2 \mid p^2 x^{p-1}$, clar adevărat. Deci, $p^2 \mid S = p \implies \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$, fals. În concluzie, nu există soluții în $\mathbb{Z}$.

Barem de notare:

Demonstrarea $p \mid (y^p - x)$ 3p

Justificarea $y^p - x = \pm p$ 1p

Concluzionarea si finalizare 3p

2.3 Problema 3

Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = 6$. Demonstrați că au loc inegalitățile:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \geq ab + bc + ca$

b)

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{(b+c)^3} + \frac{b^2}{(c+a)^3} + \frac{c^2}{(a+b)^3} \geq \\ & \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + 2(a+b+c)} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 2(a+b+c)} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 2(a+b+c)} \end{aligned}$$

Stoicescu Alex

Soluție

a) Folosind cunoscuta inegalitate $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, obținem rezultatul cerut.

b) Inegalitatea fiind simetrică, putem considera $a \geq b \geq c$.

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{b^2}{a+c} \geq \frac{c^2}{a+b} \\ & \Rightarrow \frac{1}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{(a+c)^2} \geq \frac{1}{(a+b)^2} \end{aligned}$$

Din inegalitatea lui Cebășev,

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{(b+c)^3} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{1}{(b+c)^2} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c}\right) \left(\sum_{cyc} \frac{1}{(b+c)^2}\right)}{3}$$

Avem $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ și $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{b+c}$. Din nou, din inegalitatea lui Cebășev,

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} = \sum_{cyc} a^2 \cdot \frac{1}{b+c} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} a^2\right) \left(\sum_{cyc} \frac{1}{b+c}\right)}{3}$$

Avem $6 = \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \leq 2 \sum_{cyc} a^2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2 \geq 3$
 $6 = \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \Leftrightarrow 12 = (a+b+c)^2 + \sum_{cyc} a^2 \geq (a+b+c)^2 + \frac{(a+b+c)^2}{3} \Leftrightarrow a+b+c \leq 3.$

Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică, $\sum_{cyc} \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}.$

Deci,

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{3}{2}$$

Așadar, avem

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{(b+c)^3} \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{cyc} \frac{1}{(b+c)^2} \right)$$

Din cunoscuta inegalitate $\sum_{cyc} x^2 \geq \sum_{cyc} xy$ pentru $(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}\right)$, avem $\sum_{cyc} \frac{1}{(a+b)^2} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{(a+b)(a+c)}$.

Din nou, aplicând inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică,

$$\sum_{cyc} \frac{1}{(a+b)(a+c)} = \frac{1}{2} \sum_{cyc} \left(\frac{1}{a^2 + \sum_{cyc} ab} + \frac{1}{b^2 + \sum_{cyc} ab} \right) \geq 2 \sum_{cyc} \frac{1}{a^2 + b^2 + 2(\sum_{cyc} ab)}$$

Cum

$$6 = \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \geq 2 \sum_{cyc} ab \Leftrightarrow \sum_{cyc} ab \leq 3$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 = \sum_{cyc} a^2 + 2 \sum_{cyc} ab \geq 3 \sum_{cyc} ab \geq \left(\sum_{cyc} ab \right)^2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} a \geq \sum_{cyc} ab$$

Deci,

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2}{(b+c)^3} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{a^2 + b^2 + 2(ab + bc + ca)} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{a^2 + b^2 + 2(a+b+c)}$$

Barem de notare:

a) Utilizarea inegalității $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 1p

b) Considerarea unei ordini și aplicarea Inegalității lui Cebâșev într-un mod conducător la rezultatul dorit 2p

Aplicarea inegalității lui Cebâșev, și demonstrarea unei inegalități auxiliare conducătoare la rezultatul dorit 2p

Demonstrarea inegalității $a + b + c \geq ab + bc + ca$ 2p

*Considerarea unei ordini și aplicarea unei inegalități neconducătoare la un rezultat se va puncta cu 0 puncte.

*Nu se punctează menționarea cazului de egalitate.

2.4 Problema 4

Determinați toate funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ care satisfac :

$$f(f(x)(1+y)) = f(x) + f(xy), \quad \forall x, y > 0$$

Dragomir Eduard

Soluție

Fie $x_1, x_2 > 0$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Presupunem prin absurd că $x_1 \neq x_2$, atunci, fără a restrânge generalitatea, putem considera $x_1 > x_2$.

$$f(f(x_1)(1+y)) = f(f(x_2)(1+y)) = f(x_1) + f(x_1y) = f(x_2) + f(x_2y), \quad \forall y > 0$$

De unde obținem :

$$f(x_1y) = f(x_2y), \quad \forall y > 0$$

Se demonstrează inductiv că : $f(y) = f((\frac{x_1}{x_2})^n y), \forall y > 0, n \in \mathbb{N}^*$. Cum $x_1 > x_2$, pot alege $N \in \mathbb{N}$ astfel încât :

$$\frac{(\frac{x_1}{x_2})^N}{f(1)} > 1 \quad (\text{Se alege } N > \lfloor \log_{\frac{x_1}{x_2}} f(1) \rfloor)$$

Acum, alegând $y = \frac{(\frac{x_1}{x_2})^N}{f(1)} - 1 > 0$ și $x = 1$, obținem :

$$f((\frac{x_1}{x_2})^N) = f(1) + f(y) \implies f((\frac{x_1}{x_2})^N \cdot 1) - f(1) = f(y) = 0 > 0$$

Clar o contradicție, deci $x_1 = x_2$. Trecând x în 1, avem că :

$$f(f(1)(1+y)) = f(1) + f(y), \quad \forall y > 0$$

Acum, alegând $y = \frac{1}{x}$, obținem :

$$f(f(x)(1 + \frac{1}{x})) = f(x) + f(1) \quad , \text{dar} \quad f(f(1)(1+x)) = f(1) + f(x), \quad \forall x > 0$$

Folosind ce am demonstrat anterior, avem :

$$f(x)(1 + \frac{1}{x}) = f(1)(1+x), \quad \forall x > 0$$

În relația inițială, trecând $x = y = 1$, obținem : $f(2f(1)) = 2f(1)$. Înlocuind x cu $2f(1)$ în relația de mai sus, avem :

$$f(2f(1))(1 + \frac{1}{2f(1)}) = f(1)(1 + 2f(1)) \iff 2f(1) + 1 = f(1) + 2(f(1))^2 \iff (2f(1) + 1)(f(1) - 1) = 0$$

Cum $f(1) > 0$, este evident că : $f(1) = 1$. Rescriind, obținem :

$$f(x)(1 + \frac{1}{x}) = (1+x) \iff xf(x) + f(x) = x + x^2 \iff (x+1)(x - f(x)) = 0, \quad \forall x > 0$$

Deci, singura soluție este identitatea : $f = 1_{(0,\infty)}$.

Barem de notare:

Demonstrarea afirmației : " $f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$ " 3p

Obținerea relației : $f(x)(1 + \frac{1}{x}) = f(1)(1 + x), \forall x > 0$ 2p

Calcularea lui $f(1)$ 1p

Concluzionarea si verificarea soluției 1p